

Table des matières

Introduction	1
1 Rappels et Notions Fondamentales	2
1.1 Opérateur borné	2
1.1.1 Projection orthogonale	4
1.1.2 Opérateur borné	6
1.1.3 Inversibilité d'un opérateur	8
1.1.4 Convergence des opérateurs	8
1.1.5 L' adjoint d'un opérateur borné	9
1.1.6 Opérateurs positif, normal, unitaire, auto-adjoint	12
1.1.7 Spectre d'un opérateur borné	15
1.2 Opérateur non borné	16
1.2.1 Opérations sur les opérateurs non bornés	17
1.2.2 Opérateur fermé	18
1.2.3 Adjoint d'un opérateur non borné	20
1.2.4 Spectre d'un opérateur non borné	21
1.2.5 L'inverse d'un opérateur non borné	23
2 Opérateur compact	26
2.1 Opérateur compact	26
2.2 Spectre d'un opérateur compact	28
2.3 Opérateurs à image fermée	31

3 Opérateurs semi-Fredholm	36
3.1 Opérateurs de Fredholm	36
3.1.1 Alternative de Fredholm	41
3.2 Propriétés et stabilité les opérateurs Semi-Fredholm	42
3.3 Perturbation des opérateurs semi-Fredholm	47
3.4 Opérateurs réguliers	52
Conclusion	53

Dédicace

Je dédie cet humble travail:

- A ma mère et mon père,
- A mes frères,
- Mes soeurs,
- Toute ma famille

Je veux remercier tous les élèves de ma classe,

Au final, je dédie cette mémoire à mes collègues et à tous mes proches.

Remerciements

Je tiens en premier lieu à exprimer mes plus vifs remerciements à

Mr. **Bensaloua CHENITI**

pour l'intéressant sujet qu'il m'a proposé.

Je suis également reconnaissant pour la confiance qu'il m'a accordée.

Il m'est impossible de lui exprimer toute ma gratitude en seulement quelques lignes.

Je ne saurais oublier de remercier mon jury

Mr. **Mostefa NADIR**, Professeur à l'Université de M'SILA

Mr. **Bachir GAGUI**, Docteur à l'Université de M'SILA

et toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Pour finir mes derniers mots de remerciements vont tout naturellement à ma famille et mes amis, en particulier mes parents pour leur soutien tout au long de mes études.

Notations

H	Espace de Hilbert.
X	Espace de Banach.
$\langle . \rangle$	Produit scalaire.
$\ .\ $	La norme.
$L(H)$	L'espace des opérateurs linéaires continu sur espace de Hilbert H .
$\mathcal{L}(H)$	L'espace des opérateurs linéaires borné sur espace de Hilbert H .
$C(H)$	L'espace des opérateurs linéaires fermés à domaine dense sur H .
A^{-1}	L'inverse d'un opérateur A .
A^*	Adjoint de l'opérateur A .
$R(A)$	L'image de l'opérateur A .
$N(A)$	Le noyau de l'opérateur A .
$D(A)$	Le domaine de l'opérateur A .
$K(H)$	Ensemble des opérateurs linéaires compacts de H dans H .
\overline{A}	La fermeture de l'opérateur A .
$\rho(A)$	L'ensemble resolvant de A .
$\sigma(A)$	Le spectre.
$\sigma_P(A)$	Spectre ponctuel.
$\sigma_c(A)$	Spectre continu.
$\sigma_r(A)$	Spectre résiduel.
$R(\lambda, A)$	L'application resolvente de A .
$G(A)$	Le graphe de l'opérateur A .
$cR(H)$	L'ensemble de tous les opérateurs à images fermés dans H .
$c(A)$	La conorme de l'opérateur A .
A^\dagger	L'inverse généralisé de Moore-Penrose
$F(H)$	Ensemble des opérateurs de Fredholm de H dans H .
$sF(H)$	Ensemble des opérateurs semi-Fredholm de H dans H .
$\Phi_+(H)$	Ensemble des opérateurs semi-Fredholm à gauche.
$\Phi_-(H)$	Ensemble d'opérateurs semi-Fredholm à droite.
$m_e(A)$	Le module minimal essentiel de A .

Introduction

Le but de ce travail est l'étude de quelques propriétés des opérateurs de Fredholm et l'application indice.

Or les mots opérateurs de Fredholm sous entendent opérateurs linéaires, espace de Banach, qui sous entendent espaces vectoriels normés.

L'opérateur de Fredholm est un concept d'analyse fonctionnelle qui porte le nom du mathématicien suédois **Ivar Fredholm** (1866 /1927).

Si A est un opérateur borné, A est dit de Fredholm si l'image de A est fermé, la dimension du noyau de A et la codimension de l'image de A sont finies.

Ces opérateurs sont caractérisés par le théorème d'Atkinson :

Théorème 0.0.1 *Pour tout opérateur borné A sur un espace de Banach E , les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- 1- A est un opérateur de Fredholm ;
- 2- il existe un opérateur borné S sur E tel que $I - SA$ et $I - AS$ soient de rang fini ;
- 3- il existe un opérateur borné S sur E tel que $I - SA$ et $I - AS$ soient compacts ;
- 4- la classe de A dans l'algèbre de Calkin $B(E)/K$ est inversible.

Dans le présent travail, on s'intéressera à l'étude de ses opérateurs et on donnera quelques théorème de Stabilité :

-plus précisément, ajouter à un opérateur de Fredholm un autre opérateur de norme suffisamment petite redonne un opérateur de Fredholm de même indice.

- Ajouter à un opérateur de Fredholm un opérateur compact redonne un opérateur de Fredholm de même indice.

-Le produit de deux opérateurs de Fredholm redonne un opérateur de Fredholm.

-La transposition d'un opérateur de Fredholm redonne un opérateur de Fredholm.

Dans le chapitre I, on rappellera des notions classiques de base sur les opérateurs borné et non bornés, leur ensemble résolvant et quelques résultats importants .

Le chapitre II est un rappel sur les opérateurs compacts et leur propriétés spectrales.

Dans le chapitre III, on étudiera les opérateurs de Fredholm et semi-Fredholm et nous en donnerons quelques théorèmes importants.

Le premier axe est constitué par le théorie, désormais classique, des opérateurs semi-Fredholm dans un espace de Hilbert, c'est à dire des opérateurs linéaires fermés A de domaine $D(A)$ et image $R(A)$ contenus dans un espace de Hilbert H tels que $R(A)$ est fermé et $\min(\dim N(A), \operatorname{co dim} R(A)) < +\infty$.

Les opérateurs semi-Fredholm ont deux propriétés importantes tout d'abord une propriété de stabilité qui peut s'énoncer ainsi; si on munit l'espace de tous les opérateurs fermés (bornés ou non) sur H de la métrique

$$g(A, B) = \|P_{G(A)} - P_{G(B)}\|.$$

Alors l'ensemble des opérateurs $sF(H)$ est ouvert dans cet espace.

En d'autres mots, l'ensemble des opérateurs $sF(H)$ est stable par rapport à toutes les petites perturbations. En outre, on peut facilement démontrer que la condition

$\min(\dim N(A), \operatorname{co dim} R(A)) < +\infty$ est nécessaire pour l'existence de cette stabilité.

D'autre part, dans [16] on a montré que si un opérateur $A \in sF$, alors on peut lui associer une décomposition de H comme somme directe de deux sous espaces vectoriels fermés M et N tels que:

- (i) M et N sont invariants par A
- (ii) $A|_M$ est régulier
- (iii) $A|_N$ est nilpotent

Chapitre 1

Rappels et Notions Fondamentales

Dans ce chapitre, on donne des définitions et généralités des opérateurs bornés et opérateurs non bornés sur un espace de Hilbert de dimension infinie.

1.1 Opérateur borné

Définition 1.1.1 : (*Produit scalaire*)

Soit E un \mathbb{C} espace vectoriel, s' il existe un nombre complexe $\mathbb{Z} = \langle \varphi, \psi \rangle$ pour tout couple de vecteurs φ et ψ dans E qui vérifie les conditions suivantes :

- 1) $\langle \varphi, \varphi \rangle \geq 0$ et $\langle \varphi, \varphi \rangle = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0$;
- 2) $\overline{\langle \varphi, \psi \rangle} = \langle \psi, \varphi \rangle \quad \forall \varphi, \psi \in E$;
- 3) $\langle \varphi + \psi, \omega \rangle = \langle \varphi, \omega \rangle + \langle \psi, \omega \rangle \quad \forall \varphi, \psi, \omega \in E$;
- 4) $\langle \lambda \varphi, \psi \rangle = \lambda \langle \varphi, \psi \rangle \quad \forall \varphi, \psi \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$.

alors $\langle \varphi, \psi \rangle$ est dit produit scalaire de φ et ψ , et on le note par $\langle ., . \rangle$.

Définition 1.1.2 : (*Espace normé*)

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , on dit que E est un espace vectoriel *normé* s'il est muni d'une norme, $\|.\|_E : E \rightarrow \mathbb{k}$ vérifiant les propriétés suivantes:

1. $\|f\| = 0 \iff f = 0, \forall f \in E.$
2. $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|, \forall f \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}.$
3. $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|, \forall f, g \in E.$

Définition 1.1.3 (Espace de Banach)

On appelle espace de **Banach** $(E, \|\cdot\|)$ tout espace vectoriel normé qui est complet pour la distance déduite de sa norme $d(\varphi, \psi) = \|\varphi - \psi\|$.

Définition 1.1.4 :(Espace Euclidien (préhilbertien))

Un espace vectoriel E sur \mathbb{K} est dit en espace euclidien ou **préhilbertien** s'il est muni d'un produit scalaire.

Définition 1.1.5 (Espace de Hilbert)

On appelle espace de **Hilbert** tout espace préhilbertien complet et on le notera par H

Exemple 1.1.1 :

1. $L^2([a, b])$ L'espace des fonctions de carrés intégrables sur $[a, b]$,i.e

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty.$$

2. L'espace l^2 définie par

$$l^2 = \{ x = (x_j)_j \ ; \ x_j \in \mathbb{C}, \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < \infty \},$$

muni du produit scalaire

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^k x_j \overline{y_j} ,$$

est un espace de **Hilbert**.

Corollaire 1.1.1 : Tout espace de Hilbert est un espace de Banach.

Preuve. [23] ■

1.1.1 Projection orthogonale

Définition 1.1.6 (*Opérateur de projection*)

Soit H un espace de Hilbert, si $P^2 = P$, P est appelé un **opérateur de projection**, Si $M = R(P)$, alors P est appelé projection de H sur M et dans ce cas on obtient la décomposition suivante :

$$H = R(P) \oplus N(P) \text{ et pour tout } \varphi \in H, \text{ on a : } \varphi = P\varphi + (I - P)\varphi.$$

Si en outre P est auto-adjoint, alors P est appelé projection orthogonale.

Définition 1.1.7 (*Orthogonalité*)

Deux éléments φ et ψ d'un espace de Hilbert H sont dits orthogonaux si $\langle \varphi, \psi \rangle = 0$, on écrit alors $\varphi \perp \psi$. On dit que deux parties E et F de H sont orthogonales si tout élément de E est orthogonal à tout élément de F , on écrit alors $E \perp F$.

L'orthogonal d'une partie E de H , noté E^\perp , est l'ensemble des éléments de H orthogonaux à E .

Exemple 1.1.2 :

1- Soit à calculer

$$\min_{a,b,c} \int_{-1}^1 |x^3 - ax^2 - bx - c| dx$$

Considérons $L^2(-1, 1)$ l'espace de Hilbert des (classes de) fonctions de carré sommable sur l'intervalle $[-1, 1]$ relativement à la mesure de Lebesgue. Le produit scalaire sur $L^2(-1, 1)$ est défini par:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} dx$$

Soit H le sous-espace Hilbert des polynômes de degré inférieur ou égal à deux à coefficients réels et posons $g(x) = x^3$. $F \in H$ étant un sous-espace Hilbert de dimension finie, engendré par les polynômes

$$p_0(x) = 1, p_1(x) = x, p_2(x) = x^2.$$

est donc un convexe fermé de $L^2(-1, 1)$. Il s'agit de trouver le polynôme $p \in F$

qui minimise la distance du polynôme g au sous-espace F et de calculer cette distance.

Posons

$$p = c_0 p_0 + c_1 p_1 + c_2 p_2, \quad b_j = \langle g, p_j \rangle, \quad a_{ij} = \langle p_j, p_i \rangle$$

On vérifie rapidement que $b_0 = b_2 = 0$, $b_1 = \frac{2}{5}$, et que

$$a_{00} = 2, a_{11} = a_{02} = \frac{2}{3}, a_{22} = \frac{2}{5}, a_{01} = a_{12} = 0.$$

Il en résulte que $c_0 = c_2 = 0$ et $c_1 = \frac{3}{5}$, la projection orthogonale du polynôme g sur le sous-espace F est donc

$$P_F g(x) = \frac{3x}{5} \text{ et } \|g - P_F(g)\|^2 = \frac{8}{175}.$$

On en déduit que

$$\min_{a,b,c} \int_{-1}^1 |x^3 - ax^2 - bx - c| dx = \frac{8}{175}.$$

et que ce minimum est réalisé lorsque $a = c = 0$ et $b = \frac{3}{5}$. Voyons maintenant l'avantage à disposer dans F d'une base orthogonale on peut vérifier facilement que les polynômes

$$v_0(x) = 1, \quad v_1(x) = x, \quad v_2(x) = 3x^2 - 1.$$

forment une base orthogonale du sous-espace F . On en déduit que

$$P_F(g) = \langle g, v_0 \rangle \frac{v_0}{\|v_0\|^2} + \langle g, v_1 \rangle \frac{v_1}{\|v_1\|^2} + \langle g, v_2 \rangle \frac{v_2}{\|v_2\|^2}$$

Des raisons de parité évidentes montrent que $\langle g, v_0 \rangle = \langle g, v_2 \rangle = 0$, et que

$$\langle g, v_1 \rangle = \frac{2}{5} \text{ et } \|v_1\|^2 = \frac{2}{3}. \text{ Il en résulte que } P_F(g) = \frac{3}{5}x.$$

1.1.2 Opérateur borné

Définition 1.1.8 : (Opérateur linéaire)

Soit H un espace de Hilbert et A un opérateur défini sur H dans H est dit linéaire, s'il vérifie les conditions suivantes :

pour tout φ, ψ dans H , α et β dans \mathbb{R} ou \mathbb{C}

- $A(\varphi) \in H$.
- $A(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha A(\varphi) + \beta A(\psi)$.

Définition 1.1.9 (Opérateur continu)

Un opérateur linéaire A défini sur un sous-ensemble $G \subset H$ dans H est dit continu au point φ_0 de G si pour toute suite φ_n de G qui converge vers φ_0 , la suite $(A(\varphi_n))$ converge vers $A(\varphi_0)$. C'est à dire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A(\varphi_n) = A \lim_{n \rightarrow +\infty} (\varphi_n) = A(\varphi_0)$$

Remarque 1.1.1 : L'opérateur linéaire A est dit continu sur G s'il est continu en chaque point de l'ensemble G .

Définition 1.1.10 (Opérateurs linéaires continues):

Soit H un espace de Hilbert, on note $L(H, H)$ l'ensemble des opérateurs linéaires continues de H dans H , on notera aussi $L(H) = L(H, H)$.

Définition 1.1.11 (Opérateur borné)

Un opérateur linéaire A défini sur H est dit borné, s'il existe une constante positive $C > 0$, telle que

$$\| A(\varphi) \| \leq C \| \varphi \| \quad \forall \varphi \in H, \quad (1)$$

On note $\mathcal{L}(H)$ L'ensembles des opérateurs linéaires borné sur espace de Hilbert H .

Proposition 1.1.1 La plus petite valeur positive des constantes C vérifiant la relation (1) est appelée la norme de A et sera noté par $\| A \|$:

$$\| A \|_{\mathcal{L}(H)} = \| A \| = \sup_{\varphi \neq 0} \frac{\| A(\varphi) \|}{\| \varphi \|} = \sup_{\varphi \neq 0, \| \varphi \| \leq 1} \| A(\varphi) \| = \sup_{\| \varphi \| = 1} \| A(\varphi) \|.$$

Preuve. :voir[23] ■

Exemple 1.1.3

- $I : \mathbb{C}([0, 1]) \rightarrow \mathbb{C}([0, 1])$

est bien borné car :

$$\|Ix\| = \|x\| \leq c\|x\| \quad ; \forall c \geq 1, \forall x \in H,$$

- soit $H = L^2([0, 1])$

$$\begin{aligned} A &: H \rightarrow H \\ f &\rightarrow Af(x) = \int_0^1 (x-t)f(t)dt \end{aligned}$$

A est borné car:

$$\begin{aligned} \|Af\|^2 &= \int_0^1 |Af(x)|^2 dx = \int_0^1 \left| \int_0^x (x-t)f(t)dt \right|^2 dx \\ &\leq \int_0^1 \left(\int_0^x |x-t|^2 dt \right) dx + \int_0^1 \int_0^x |f(t)|^2 dt dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} \int_0^x |f(t)|^2 dt \right] dx \leq \frac{1}{3} \|f\|^2, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \|Af\|^2 &\leq \frac{1}{3} \|f\|^2, \forall f \in L^2, \\ \Rightarrow \|Af\| &\leq \frac{1}{\sqrt{3}} \|f\|, \quad c = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right). \end{aligned}$$

Proposition 1.1.2 Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. A est continu sur H
2. A est borné, c'est-à-dire, il existe $C > 0$ telle que pour tout $\varphi \in H$

$$\|A(\varphi)\| \leq C \|\varphi\| \quad \forall \varphi \in H.$$

Preuve. [23] ■

Définition 1.1.12 : *(Image d'un opérateur)*

Soit un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$, on appelle image de A et on note $R(A)$ l'ensemble:

$$R(A) =: \{\psi \in H \text{ tel que } \psi = A\varphi \text{ et } \varphi \in D(A)\}.$$

Définition 1.1.13 *(Noyau d'un opérateur)*

Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, on appelle noyau de A et on note $N(A)$ l'ensemble:

$$N(A) := \{\varphi \in D(A) : A\varphi = 0\}.$$

Théorème 1.1.1 *(Théorème de représentation de Riez(1918))* Soit $\varphi \in H$ il existe $f \in H$ unique tel que

$$\langle \varphi, v \rangle = (f, v) \quad \forall v \in H.$$

De plus on a

$$\|f\| = \|\varphi\|_H.$$

1.1.3 Inversibilité d'un opérateur**Définition 1.1.14** *(Opérateur inversible)*

Un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ est dit inversible s'il admet un inverse dans $\mathcal{L}(H)$. C'est à dire:

$$\exists S \in \mathcal{L}(H) \text{ tel que } SA = AS = I.$$

S est appelé l'inverse de A et est noté par A^{-1} .

Remarque 1.1.2 L'inverse d'un opérateur borné n'est pas toujours borné.

1.1.4 Convergence des opérateurs**Définition 1.1.15** *(Convergence des opérateurs)*

Soit H un espace de Hilbert et $\{A_n\}_n$ une suite d'opérateurs bornés de $\mathcal{L}(H)$.

On dit que (A_n) est convergente vers A dans $\mathcal{L}(H)$ si et seulement si $\|A_n - A\|_{\mathcal{L}(H)}$ est convergente vers 0 dans \mathbb{R} . Autrement dit :

$$A_n \rightarrow A \text{ dans } \mathcal{L}(H) \iff \|A_n - A\|_{\mathcal{L}(H)} \rightarrow 0 \text{ dans } \mathbb{R}.$$

1.1.5 L' adjoint d'un opérateur borné

Définition 1.1.16 : (Opérateur adjoint)

Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Alors il existe un unique $A^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ tel que, pour tout $\varphi \in H_1$ et tout $\psi \in H_2$, on a :

$$\langle A\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, A^*\psi \rangle$$

Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. L'unique application linéaire $A^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ tel que, pour tout $\varphi \in H_1$ et $\psi \in H_2$, on a :

$$\langle A\varphi, \psi \rangle_{H_2} = \langle \varphi, A^*\psi \rangle_{H_1}.$$

Remarque 1.1.3 :

De plus , on a $\|A\| = \|A^*\|$.

Preuve. Cette égalité définit un opérateur adjoint de A noté A^* de H dans H , on a

$$\begin{aligned} \|A^*\psi\|^2 &= \langle A^*\psi, A^*\psi \rangle \\ &= \langle AA^*\psi, \psi \rangle \\ &\leq \|AA^*\psi\| \|\psi\| \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

$$\|A^*\psi\|^2 \leq \|A\| \|A^*\psi\| \|\psi\|. \tag{1.1.2}$$

ce qui implique que

$$\|A^*\psi\| \leq \|A\| \|\psi\|$$

et par conséquent

$$\|A^*\| \leq \|A\|. \tag{*}$$

Inversement,

$$\begin{aligned} \|A\varphi\|^2 &= \langle A\varphi, A\varphi \rangle \\ &= \langle A^*A\varphi, \varphi \rangle \\ &\leq \|A^*A\varphi\| \|\varphi\| \\ &\leq \|A^*\| \|A\varphi\| \|\varphi\|. \end{aligned}$$

Donc

$$\|A\varphi\| \leq \|A^*\| \|\varphi\|.$$

ce qui donne

$$\|A\| \leq \|A^*\|. \quad (**)$$

En combinant (*) et (**) on obtient

$$\|A\| = \|A^*\|.$$

■

Exemple 1.1.4

1. l'opérateur identité : Soit $x, y \in H$. C'est clair que:

$$\langle Ix, y \rangle = \langle x, y \rangle = \langle x, I^*y \rangle$$

d'où $I = I^*$.

2. On considère l'opérateur **Shift** $S: l^2(\mathbb{C}) \rightarrow l^2(\mathbb{C})$ défini par:

$$S(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$$

Soient (x_n) et (y_n) dans $l^2(\mathbb{C})$, alors :

$$\begin{aligned} \langle S^*x_n, y_n \rangle &= \langle x_n, Sy_n \rangle \\ &= \langle (x_1, x_2, \dots), (0, y_1, y_2, \dots) \rangle \\ &= x_1 \cdot 0 + x_2 \overline{y_1} + x_3 \overline{y_2} + \dots \\ &= \langle (x_2, x_3, \dots), (y_1, y_2, \dots) \rangle \end{aligned}$$

Donc S^* est défini par

$$S^*(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots).$$

Proposition 1.1.3 : Soient A et B deux opérateurs linéaires définis sur un espace de Hilbert H dans lui même alors, on a les relations suivantes:

1. $(A + B)^* = A^* + B^*$.
2. $(\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*$. pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$.
3. $(AB)^* = B^* A^*$.
4. $I^* = I$.
5. $(A^*)^* = A$.
6. $\|A\| = \|A^*\| = \|AA^*\|^{\frac{1}{2}}$.

Proposition 1.1.4 : Soit A un opérateur linéaire défini sur un espace de Hilbert H_1 dans un espace de Hilbert H_2 alors, on a

$$N(A) = \{\varphi \in H_1, A\varphi = 0\} = R^\perp(A^*).$$

en encore

$$N(A^*) = \{\psi \in H_2, A^*\psi = 0\} = R^\perp(A).$$

Preuve.

En effet, soit $\varphi \in N(A)$ alors, pour tout $\psi \in H_2$, on a $A^*\psi \in R(A^*)$. De plus

$$\langle A\varphi, \psi \rangle = 0 = \langle \varphi, A^*\psi \rangle.$$

D'où, on obtient $\varphi \in R^\perp(A^*)$, en encore

$$N(A) \subset R^\perp(A^*).$$

Inversement, soit $\theta \in R^\perp(A^*)$, alors, pour tout $\psi \in H_2$, on a. $A^*\psi \in R(A^*)$. De plus

$$\langle \theta, A^*\psi \rangle = 0 = \langle A\theta, \psi \rangle.$$

D'où, on obtient $\theta \in N(A)$, C'est à dire

$$R^\perp(A^*) \subset N(A).$$

ou encore

$$N(A) = R^\perp(A^*).$$

pour la deuxième égalité, il suffit de remplacer l'opérateur A par A^* dans la première égalité et en vertu de la proposition, il vient $N(A^*) = R^\perp(A^*)^* = R^\perp(A)$. ■

1.1.6 Opérateurs positif, normal, unitaire, auto-adjoint

Définition 1.1.17 (Opérateur positif)

Soit A un opérateur linéaire défini sur un espace de Hilbert H dans lui même, on dit A est un opérateur positif et que l'on note $A \geq 0$, si pour tout $\varphi \in H$, on a

$$\langle A\varphi, \varphi \rangle \geq 0.$$

Racine carrée d'un opérateur

Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, l'opérateur positif R est dit racine carrée de l'opérateur A si, on a la relation

$$A = R^2 \quad \text{ou encore} \quad R = \sqrt{A}.$$

Définition 1.1.18 (*Opérateurs normal*)

Soit H un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(H)$. On dit que A est un opérateur normal si :

$$A^*A = AA^*.$$

Exemple 1.1.5 La multiplication A_φ par une fonction mesurable bornée φ est un opérateur normal sur $L^2([0, 1])$, car :

$$A_\varphi : L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1]), \varphi \in C[0, 1]$$

$$(A_\varphi f)(t) = \varphi(t)f(t)$$

ona

$$\langle A_\varphi f, g \rangle = \langle f, A_\varphi g \rangle, \forall f, g \in L^2([0, 1])$$

$$\langle \varphi(t)f(t), g(t) \rangle = \langle f(t), \overline{\varphi(t)}g(t) \rangle$$

donc

$$(A^* \varphi g)(t) = \overline{\varphi(t)}g(t)$$

d'où $\overline{\varphi}$

$$A^* \varphi = A_{\overline{\varphi}}$$

Alors,

$$A_\varphi^* A_\varphi = A_{\overline{\varphi}} A_\varphi = A_\varphi A_{\overline{\varphi}} = A_\varphi A_\varphi^*$$

Donc A_φ est un opérateur normal.

Exemple 1.1.6 Soit l'opérateur shift

$$S(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$$

pour $(x_1, x_2, \dots) \in L^2(\mathbb{C})$ On a précédemment $S^*S = I_H$ et

$$S^*(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$$

d'où

$$SS^*(x_1, x_2, \dots) = S(x_2, x_3, \dots) = (0, x_2, x_3, \dots)$$

Alors $SS^* \neq S^*S$, donc S n'est pas normal.

Définition 1.1.19 (Opérateur unitaire)

Soit H un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(H)$. On dit que A est un opérateur unitaire si :

$$A^*A = AA^* = I_H.$$

Définition 1.1.20 (Opérateur auto-adjoint)

Un opérateur A est dite auto-adjoint si $A = A^*$, i.e :

$$\langle A\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, A\psi \rangle \quad \forall \varphi, \psi \in H$$

L'opérateur identité I est un opérateur auto-adjoint car $I = I^*$

$$\langle I\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, I^*\psi \rangle \quad \forall \varphi, \psi \in H.$$

Exemple 1.1.7

1/Considérons l'opérateur A défini sur $L^2(\mathbb{R})$ par

$$(Ax)(t) = e^{-|t|}x(t)$$

A est un opérateur borné auto-adjoint. En effet ,

$$\begin{aligned} \langle Ax, y \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}x(t)\overline{y(t)}dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)(\overline{[e^{-|t|}y(t)]})dt \\ &= \langle x, Ay \rangle \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

2/L'opérateur identité I_H est un opérateur auto-adjoint car $I_H^* = I_H$

$$\langle I_H x, y \rangle = \langle x, I_H^* y \rangle \quad \forall x, y \in H.$$

1.1.7 Spectre d'un opérateur borné

Définition 1.1.21 : (Valeur propre)

On dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A si $\lambda I - A$ n'est pas injectif. Autrement

dit, l'ensemble des valeurs propres $V_p(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} / N(\lambda I - A) \neq \{0\}\}$.

$N(\lambda I - A)$ est l'espace propre associé à λ .

Définition 1.1.22 : (ensemble résolvant)

Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ On appelle ensemble résolvant de A l'ensemble suivant:

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \text{ tel que } (\lambda I - A) \text{ est inversible} \}$$

Un élément de $\rho(A)$ est appelé **valeur résolvante** de A

1. Si $\lambda \in \rho(A)$, on définit la **résolvante** $\mathbf{R}_\lambda(A)$ de A au point λ par

$$\mathbf{R}_\lambda(A) := (\lambda I - A)^{-1}$$

La résolvante $\mathbf{R}_\lambda(A)$ est simplement notée \mathbf{R}_λ .

2. Le **spectre** $\sigma(A)$ de A est l'ensemble

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$$

Un élément de $\sigma(A)$ est une valeur spectrale de A

Définitions 1.1.1 : Soit $A \in \mathcal{L}(H)$

1. On appelle **spectre continu** de A et on note par $\sigma_c(A)$, l'ensemble

$$\sigma_c(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \text{ tel que } (\lambda I - A) \text{ injectif et } R(\lambda I - A) \neq \overline{R(\lambda I - A)} = H\}.$$

2. On appelle **spectre résiduel** de A et on note par $\sigma_r(A)$, l'ensemble

$$\sigma_r(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \text{ tel que } (\lambda I - A) \text{ injectif et } \overline{R(\lambda I - A)} \neq H\}.$$

3. On appelle **spectre ponctuel** de A et on note par $\sigma_P(A)$, l'ensemble

$$\sigma_P(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \text{ tel que } (\lambda I - A) \text{ n'est pas injectif}\}.$$

Les éléments du **spectre ponctuel** sont appelés les valeurs propre de A .

4. On appelle **spectre discret** de H , noté $\sigma_d(A)$ l'ensemble des valeurs propres isolées de H , de multiplicité finie.

Remarque 1.1.4 *Le spectre $\sigma(A)$ est la réunion disjointe de trois ensembles*

$$\sigma(A) = \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A) \cup \sigma_P(A).$$

1. Si A est inversible, alors $\sigma(A)^{-1} = \{1/\lambda : \lambda \in \sigma(A)\}$.
2. $\sigma(p(A)) = p(\sigma(A))$ pour tout polynôme $p \in \mathbb{C}[X]$.

1.2 Opérateur non borné

Définition 1.2.1 (*Domaine d'un opérateur*)

Soit A un opérateur définie sur $D(A) \subset H$ dans H . $D(A)$ est appelé le domaine de l'opérateur A et définie par :

$$D(A) =: \{\varphi \in H \text{ telle que } A\varphi \in H\}.$$

Définition 1.2.2 (*Opérateur non borné*)

Soit A un opérateur définie sur $D(A) \subset H$ dans H . On dit qu'un opérateur linéaire A définie sur $D(A)$ est un opérateur **non borné** si :

$$D(A) \neq H.$$

Exemple 1.2.1 : Soit A l'opérateur de multiplication par x défini de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$ par :

$$Af(x) = xf(x)$$

A à pour domaine

$$D(A) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) / xf(x) \in L^2(\mathbb{R})\}$$

tel que le produit scalaire sur $L^2(\mathbb{R})$ est

$$\langle f, g \rangle = \int f(x) \overline{g(x)} dx$$

alors:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \in L^2(\mathbb{R}).$$

mais $xf(x) \notin L^2(\mathbb{R})$ car $\int xf(x)dx$ est divergente, alors A est un opérateur non borné.

1.2.1 Opérations sur les opérateurs non bornés

Définition 1.2.3 : Si A et S, R sont des opérateurs dans H à valeurs dans H

1. la somme $A + S$ est défini par :

$$D(A + S) = D(A) \cap D(S)$$

$$(A + S)\varphi = A\varphi + S\varphi \quad \forall \varphi \in D(A + S)$$

2. L'opérateur produit (ou composition) RA est défini par :

$$D(RA) = \{\varphi \in D(A) \mid A\varphi \in D(R)\},$$

$$(RA)\varphi = R(A\varphi) \quad \forall \varphi \in D(RA).$$

3. La multiplication de A par un scalaire λ est définie comme l'opérateur :

$$\lambda A : D(A) \rightarrow E$$

$$\varphi \rightarrow \lambda A\varphi.$$

tel que :

$$\text{si } \lambda = 0 \text{ alors } D(\lambda A) = E$$

$$\text{si } \lambda \neq 0 \text{ alors } D(\lambda A) = D(A).$$

4. Associativité :

$$(R + S) + A = R + (S + A); S + A = A + S; (AS)R = A(SR).$$

5. La distributivité :

$$(R + S)A = RA + SA; A(R + S) \supset AR + AS.$$

Définition 1.2.4 : (Opérateur densément défini)

Soit H est un espace de Hilbert, un opérateur A de H dans H est dit **densément défini** si son domaine $D(A)$ est dense dans H , i.e.

$$\overline{D(A)} = H.$$

1.2.2 Opérateur fermé

Définition 1.2.5 (Graphe d'un opérateur)

Soit H un espace de Hilbert et $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur. Le graphe de A est le sous-espace vectoriel noté $G(A)$ de $H \times H$ défini par

$$G(A) = \{(\varphi, A\varphi), \text{ tel que } \varphi \in D(A)\}$$

Cette notion est importante puisqu'un opérateur est complètement déterminé par son graphe. Ainsi, pour des opérateurs A et B , on a $A = B$ (resp. $A \subseteq B$) si et seulement si $G(A) = G(B)$ (resp. $G(A) \subseteq G(B)$).

Définition 1.2.6 (Norme du graphe d'un opérateur)

Soit H un espace de Hilbert et $A : D(A) \subset H \rightarrow H$. Il est clair que

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{D(A)} = \langle \varphi, \psi \rangle_H + \langle A\varphi, A\psi \rangle_H \quad \forall \varphi, \psi \in D(A).$$

Définie un produit scalaire dans le domaine $D(A)$. La norme correspondant

$$\|\varphi\|_{D(A)} = \sqrt{\|\varphi\|_H^2 + \|A\varphi\|_H^2}, \quad \forall \varphi \in D(A).$$

Est appelée la norme du graphe de l'opérateur A , Elle est équivalent à la norme

$$\|\varphi\|_{D(A)} = \|\varphi\|_H + \|A\varphi\|_H, \quad \forall \varphi \in D(A) .$$

Dans $D(A)$.

Définition 1.2.7 (Opérateur fermé)

On dit qu'un opérateur A est fermé lorsque son graphe est fermé dans $H \times H$ ie :

$$\forall (\varphi_n)_n \subset D(A) \text{ et } \varphi_n \rightarrow \psi \text{ dans } H \text{ et } A\varphi_n \rightarrow \psi, \text{ alors } \varphi \in D(A) \text{ et } A\varphi = \psi$$

L'ensemble des opérateurs linéaires fermés de H dans H et à domaines denses est noté $C(H)$.

Théorème 1.2.1 (Théorème du graphe fermé) Soient E et F deux espaces de Banach, et soit $A : E \rightarrow F$ un opérateur linéaire. On suppose que le garphe de A est fermé dans $E \times F$. Alors A est continue.

Proposition 1.2.1 Un opérateur linéaire A à domaine $D(A)$ est fermé dans H si et seulement si $G(A)$ est un sous espace fermé de $H \times H$. Si l'on munit $H \times H$ du produit scalaire usuel :

$$\langle (\varphi_1, \varphi_2), (\psi_1, \psi_2) \rangle_{H \times H} = \langle \varphi_1, \psi_1 \rangle_H + \langle \varphi_2, \psi_2 \rangle_H \quad \forall \varphi_i, \psi_i \in H, i = 1, 2$$

$H \times H$ est alors un espace de Hilbert.

Preuve. :voir[19] ■

Théorème 1.2.2 Soient E et F deux espaces de Banach, $A : D(A) \subset E \rightarrow F$. Les assertions suivantes sont équivalentes:

- 1- A est fermé.
- 2- Le graphe $G(A)$ est un sous-espace fermé de $E \times F$.
- 3- $(D(A), \|\cdot\|_A)$ est complet, ou $(D(A), \langle \cdot \rangle_A)$ est un espace de Hilbert.

1.2.3 Adjoint d'un opérateur non borné

Nous étendons la notion d'adjoint pour les opérateurs linéaires non bornés dont le domaine est dense.

Définition 1.2.8 : *(Domaine de l'adjoint)*

Soit $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur dont le domaine est dense dans H . Le domaine de l'adjoint A^* de A est par définition :

$$D(A^*) = \{\psi \in H : \text{il existe } C \geq 0 \text{ tel que } |\langle A\varphi, \psi \rangle_H| \leq C\|\varphi\|, \text{ pour tout } \varphi \in D(A)\}.$$

Définition 1.2.9 *(Opérateurs adjoints)*

Soit $A \in C(H)$, et considérons l'ensemble des points $\varphi \in H$ tels que la forme linéaire $\varphi \rightarrow \langle A\varphi, \psi \rangle$ soit continue sur $D(A)$ pour la norme induite par celle de H . Pour un tel point φ , cette forme linéaire se prolonge par continuité à l'espace H tout entier ; donc il existe un élément de H , unique noté $A^*\varphi$ puisque $D(A)$ est dense dans H et déterminé par l'égalité :

$$\langle A\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, A^*\psi \rangle \text{ pour tout } \varphi \in D(A)$$

Proposition 1.2.2 *L'adjoint A^* d'un opérateur à domaine dense A est fermé.*

$$D(A^*) = \{\psi \in H : \text{il existe } C \geq 0 \text{ tel que } |\langle A\varphi, \psi \rangle_H| \leq C\|\varphi\|, \text{ pour tout } \varphi \in D(A)\}.$$

Propriétés: Soit H espace de Hilbert et $S, A, R : H \rightarrow H$

trois opérateurs non bornés densément définis, avec $D(S + A)$ et

$D(RA)$ dense dans H . Alors :

1. $S^* + A^* \subset (S + A^*)^*$ et $A^*R^* \subset (RA)^*$;
2. $(A + \alpha I)^* = A^* + \bar{\alpha}I$; et $(\alpha A)^* = \bar{\alpha}A^*$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$;
3. Si $S \subset A$, alors $S^* \supset A^*$.

Remarque 1.2.1 $\forall A \in C(H)$ on a :

- (1) $N(A^*) = R(A)^\perp$
- (2) $\dim N(A^*) = \text{co dim } R(A)$, $\dim N(A) = \text{co dim } R(A^*)$
- (3) on a : $N(A^*) \oplus R(A) = H$ si seulement si $R(A)$ est fermé.

1.2.4 Spectre d'un opérateur non borné

Beaucoup de définitions et de résultats exposés dans la subsection précédente sont encore valables pour des opérateurs non bornés, à condition qu'ils soient fermés.

Définition 1.2.10 : Soit $(D(A), A)$ opérateur non borné sur un Hilbert H de domaine dense.

On définit :

- l'ensemble résolvant de A

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} / (\lambda I - A) : D(A) \rightarrow H \text{ bijection d'inverse borné}\}$$

- le spectre de A

$$\sigma(A) := \mathbb{C} - \rho(A)$$

- la résolvante de A

$$\mathbf{R}_\lambda(A) : \rho(A) \rightarrow \mathcal{L}(H)$$

$$\lambda \rightarrow (\lambda I - A)^{-1}$$

Exemple 1.2.2 : Soit A un opérateur (opérateur de multiplication) non borné et $H = L^2(\mathbb{R})$

définit par :

$$Af(x) = xf(x).$$

De domaine

$$D(A) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) / xf(x) \in L^2(\mathbb{R})\}.$$

Alors $D(A)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ et A est auto-adjoint, donc on a :

$$\sigma_P(A) = \phi, \sigma_c(A) = \mathbb{R}, \sigma_r(A) = \phi, \rho(A) = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

Théorème 1.2.3 *Le spectre d'un opérateur fermé est une partie fermée de \mathbb{C}*

Preuve. *vérifions simplement que l'ensemble résolvant d'un opérateur fermé A est ouvert.*

soit $\lambda_0 \in \rho(A)$. pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ on a:

$$\lambda I - A = (\lambda_0 I - A)(I + (\lambda - \lambda_0))R(\lambda_0)$$

$$R(\lambda_0) = (\lambda_0 I - A)^{-1} \text{ par définition}$$

si λ est tel que $|\lambda - \lambda_0| < \|R(\lambda_0)\|^{-1}$, alors $I + (\lambda - \lambda_0)R(\lambda_0)$ est inversible d'inverse donné par

$$\sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m (\lambda - \lambda_0)^m R(\lambda_0)^m$$

et donc $R(\lambda_0)$ est aussi:

$$R(\lambda) = (I + (\lambda - \lambda_0)R(\lambda_0))^{-1}R(\lambda_0).$$

Mais contrairement à ce que l'on sait pour les opérateurs bornés, le spectre d'un opérateur fermé peut-être (ϕ) , ou non-borné, égal à \mathbb{C} tout entier ■

Exemple 1.2.3 *L'opérateur différentiel. $A = \frac{d}{dx} : L^2[a, b]$ avec $\lambda < a < b < \infty$.*

$$D(A) = H^1[a, b].$$

$\forall \lambda \in \mathbb{C}$, l'équation $(\lambda I - A)u = f$ n'a certainement pas de solution unique puisque toutes les fonction $t \rightarrow Ce^{\lambda t}$. Sont des éléments de $D(A)$ solution de $(\lambda I - A)u = 0$. Dans ce cas $\sigma(A) = \mathbb{C}$.

Si l'on restreint le domaine à $D(A) = \{u \in H^1[a, b]; u(a) = 0\}$.

alors $\sigma(A) = \phi$, car $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall f \in L^2[a, b]$ il existe un unique $u \in D(A)$ tel que $(\lambda I - A)u = f$.

$$u(t) = - \int_0^t e^{\lambda(t-s)} f(s) ds.$$

1.2.5 L'inverse d'un opérateur non borné

Définition 1.2.11 (*Inverse d'un opérateur non borné*)

Soit H un espace de Hilbert $A : D(A) \subset H$ un opérateur linéaire bijectif. On définit l'opérateur A^{-1} de H dans H telle que :

$$AA^{-1}f = f \quad \forall f \in H \quad \text{et} \quad AA^{-1}g = g \quad \forall g \in D(A).$$

L'opérateur A^{-1} est dit l'inverse de A .

Proposition 1.2.3 : Soit H un espace de Hilbert, A un opérateur borné, ou non borné fermé de domaine dense, et U un opérateur unitaire. On considère l'opérateur (fermé) de domaine dense

$$A_U = UAU^{-1} = UAU^*.$$

Alors $\sigma(A_U) = \sigma(A)$ et si A est auto adjoint, A_U l'est aussi.

Théorème 1.2.4 Si $A \in \mathcal{L}(H)$ tel que $\|A\| < 1$, alors $I - A$ est inversible, de plus

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n. \quad (1.2.1)$$

Théorème 1.2.5 Pour $A \in \mathcal{L}(H)$, H est un Hilbert si A est auto-adjoint, alors toutes les valeurs propres de A sont réelles.

Preuve. [17] ■

Théorème 1.2.6 Soit A un opérateur définie sur H dans H l'application résolvante de A :

$R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ vérifie les propriétés suivantes :

1* $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C} \quad (\lambda, \mu \in \rho(A))$

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\mu, A)R(\lambda, A).$$

2* $R(\cdot, A)$ est une application analytique sur $\rho(A)$

3* si $\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > \|A\|$; alors $\lambda \in \rho(A)$ et $R(\lambda, A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}$.

Preuve.

1*

$$\begin{aligned}
 R(\lambda, A) - R(\mu, A) &= (\lambda I - A)^{-1} - (\mu I - A)^{-1} \\
 &= (\lambda I - A)^{-1} [I - (\lambda I - A)(\mu I - A)^{-1}] \\
 &= (\lambda I - A)^{-1} [(\mu I - A) - (\lambda I - A)](\mu I - A)^{-1} \\
 &= (\mu - \lambda) R(\lambda, A) R(\mu, A).
 \end{aligned}$$

2* Soit $\lambda_0 \in \rho(A)$, $D(\lambda_0, \|R(\lambda_0, A)\|^{-1})$ est disque centre λ_0 et rayon r ;

$r = \|R(\lambda_0, A)\|^{-1}$ alors $\lambda \in D$ on a

$$\lambda I - A = [I - (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0, A)](\lambda_0 I - A)$$

on a

$$\|(\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0, A)\| = |\lambda_0 - \lambda| \|R(\lambda_0, A)\| < 1$$

car $|\lambda_0 - \lambda| < r$

donc d'après le Théorème précédent (1.2.4) $I - (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0, A)$ est un inversible.

D'où l'inversible de $(\lambda I - A)$ car $(\lambda_0 I - A)$ est inversible.

Et on a

$$R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1} = (\lambda_0 I - A)^{-1} [I - (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0, A)]^{-1}$$

et la série

$$\begin{aligned}
 [I - (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0, A)]^{-1} &= \sum_{n \geq 0} (\lambda_0 - \lambda)^n R(\lambda_0, A)^n \\
 &= \sum_{n \geq 0} (-1)^n (\lambda - \lambda_0)^n R(\lambda_0, A)^{n+1}
 \end{aligned}$$

d'où $R(., A)$ est une application analytique sur $\rho(A)$.

3* Si $|\lambda| > \|A\|$ alors $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\lambda \neq 0$

$$\frac{|\lambda|}{|\lambda|} > \frac{\|A\|}{|\lambda|}$$

$\Rightarrow \| \lambda^{-1} A \| < 1$ d'après (02) $I - \lambda^{-1} A$ est inversible, i.e. et on a

$$(I - \lambda^{-1} A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda^{-1} A)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^n}$$

par conséquent

$$\begin{aligned} R(\lambda, A) &= (\lambda I - A)^{-1} = [\lambda(I - \lambda^{-1} A)]^{-1} = \lambda^{-1} (I - \lambda^{-1} A)^{-1} \\ &= \lambda^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}. \end{aligned}$$

■

Chapitre 2

Opérateur compact

2.1 Opérateur compact

Définition 2.1.1 (*Opérateur compact*)

On dit qu'un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ est compact si et seulement si pour toute suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bornée de H , $(A\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contient une sous suite $(A\varphi_{n(k)})_{k, n \in \mathbb{N}}$ qui converge dans H .

Théorème 2.1.1 Une combinaison linéaire $A = \alpha A_1 + \beta A_2$ d'opérateurs compacts est un opérateur compact.

Preuve. Soit $\{\varphi_n\}$ une suite bornée de H et soit $\{A\varphi_n\}$ une suite de H , alors

$$A\varphi_n(x) = \alpha A_1\varphi_n(x) + \beta A_2\varphi_n(x) \quad \text{avec } \varphi_n(x) \in H, \quad n \in \mathbb{N}$$

A_1 et A_2 étant compacts, on peut extraire de $\{A_1\varphi_n\}$ et de $\{A_2\varphi_n\}$ deux sous suites convergentes qui donnent par leur somme une sous suite convergente de $\{A\varphi_n\}$, donc A est compact. ■

Théorème 2.1.2 Le produit AB de deux opérateurs bornés A et B est compact si l'un des opérateurs A ou B est compact.

Preuve. Soit $\{\varphi_n\}$ une suite bornée de H , alors si B est un opérateur borné la suite $B\varphi_n(x)$ est aussi bornée, et de la compacité de l'opérateur A il existe une sous suite de $A(B\varphi_n(x))$ qui converge, ce qui implique que AB est compact. D'autre part si B est compact, on peut extraire de la suite $B\varphi_n(x)$ une sous suite convergente $B\varphi_{n(k)}(x)$, et de la

continuité de l'opérateur A car il est borné la suite $A(B\varphi_{n(k)}(x))$ converge, ce qui implique que AB est compact. ■

Définition 2.1.2 On dit qu'un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ et de **rang fini** si $\dim R(A) < \infty$.

Remarque 2.1.1 Un opérateur continu de rang fini est compact.

Proposition 2.1.1 Soit $\{A_n\}$ une suite d'opérateur continu de rang fini de H dans H et soit $A \in \mathcal{L}(H)$ tels que $\|A_n - A\| \rightarrow 0$ alors $A \in K(H)$.

Preuve. [9] ■

Théorème 2.1.3 L'opérateur identique I de $E \in H$ dans H est compact si et seulement si E est de dimension finie.

Preuve. [23] ■

Théorème 2.1.4 Un opérateur compact est un opérateur borné.

Preuve. [23] ■

Théorème 2.1.5 Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. Les assertions suivantes sont équivalentes:

- (a) A est compact.
- (b) A^* est compact.
- (c) Il existe une suite (A_n) d'opérateurs de rang fini qui converge vers A (pour la norme opérateur).

Théorème 2.1.6 : (Schauder)

$$A \in K(H) \text{ si et seulement si } A^* \in K(H)$$

Preuve. [9] ■

Théorème 2.1.7 [15]

$$\text{Si } A \in K(H), B \in \mathcal{L}(H), \text{ alors } AB \in K(H) \text{ et } BA \in K(H)$$

2.2 Spectre d'un opérateur compact

Corollaire 2.2.1 Soit $A \in K(H)$ et $T = \lambda I - A$. Les suivantes sont équivalentes :

1. T est injectif.
2. T est surjectif.

Proposition 2.2.1 [4]

Pour tout $A \in \mathcal{L}(H)$, le spectre $\sigma(A)$ est un ensemble compact non vide de \mathbb{C} et

$$\sigma(A) \subset [-\|A\|, +\|A\|].$$

Remarque 2.2.1 Il est clair que $V_P(A)$. En général l'inclusion est stricte, il peut exister λ tel que:

$$N(\lambda I - A) = \{0\} \quad \text{et} \quad R(\lambda I - A) \neq H.$$

(Un tel λ appartient au spectre mais n'est pas valeur propre).

Exemple 2.2.1 $H = l^2$

$Au = (0; u_1; u_2; \dots)$ où $u = (u_1; u_2; \dots)$ (i.e. A est le Shift à droite). Alors $0 \in \sigma(A)$ et $0 \notin V_P(A)$.

Théorème 2.2.1 Soit H un espace de Hilbert, $A \in K(H)$ avec $\dim H = \infty$: Alors on a

1. $0 \in \sigma(A)$
2. $\sigma(A) \setminus \{0\} = V_P(A) \setminus \{0\}$,
3. l'une des situations suivantes :
 - ou bien $\sigma(A) = 0$,
 - ou bien $\sigma(A) \setminus \{0\}$ est fini
 - ou bien $\sigma(A) \setminus \{0\}$ est une suite qui tend vers 0.

Preuve. [4] ■

Lemme 2.2.1 Soit $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels tous distincts telle que

$$\lambda_n \rightarrow \lambda$$

et

$$\lambda_n \in \sigma(A) \setminus \{0\}, \quad \forall n$$

Alors $\lambda = 0$.

Autrement dit, tous les points de $\sigma(A) \setminus \{0\}$ sont isolés.

Théorème 2.2.2 Soit $A \in K(H)$. Alors le spectre de A est un ensemble au plus dénombrable qui contient 0. De plus si $\lambda \in \sigma(A)$ et $\lambda \neq 0$, alors λ est une valeur propre de A , et l'espace propre correspondant $N(k - \lambda I)$ est de dimension finie. Enfin, si (λ_n) est une suite d'éléments distincts de $\sigma(A)$, alors $\lim_n \lambda_n = 0$.

Lemme 2.2.2 Soit $A \in K(H)$ et posons $T = I - A$. Soit $M \subset H$, un sous espace fermé tel que $T|_M$ est injectif. Alors il existe $c > 0$ tel que $\|Tx\| \geq c\|x\|$ pour tout $x \in M$, et donc $T(M)$ est un sous espace fermé.

Démonstration.

Sinon, il existerait une suite (x_n) dans M avec $\|x_n\| = 1$ et $Tx_n \rightarrow 0$. Comme A est compact, quitte à passer à une sous suite on peut supposer que (Ax_n) converge, mais comme $T + K = I$, la suite (x_n) converge aussi, soit $x \in M$ sa limite. On obtient $Tx = 0$ ce qui contredit l'hypothèse.

pour démontrer que $T(M)$ est fermé, soit (y_n) une suite dans M tel que (Ty_n) converge. L'inégalité démontrée précédemment implique que (y_n) est aussi de Cauchy, donc converge. Si on note y sa limite, alors $\lim_n Ty_n = Ty \in T(M)$. ■

Lemme 2.2.3 Soit $A \in K(H)$ et $T = I - A$. Alors $N(T)$ est de dimension finie et $R(T)$ est un sous espace fermé.

Démonstration.

la premier point a été déjà vu. Soit $M = N(T)^\perp$. On vérifie que $T(M) = T(H) = R(T)$ et que $T|_M$ est injectif. Par le lemme précédent, $R(T)$ est fermée. ■

Lemme 2.2.4 *Si M et N sont deux sous espaces fermés de H avec $M \subset N$ et $M \neq N$, alors il existe $\psi \in N$ avec $\|\psi\| = 1$ et $d(\psi, M) = 1$.*

Démonstration.

Il suffit de choisir ψ dans $N \cap M^\perp$. ■

Lemme 2.2.5 *Soit $A \in K(H)$ et $T = I - A$. Il n'existe pas de suite infinie $(F_n)_{n \geq 0}$ ou $(F_n)_{n \leq 0}$ de sous espaces fermés de H tels que pour tout n :*

$$F_n \subset F_{n+1} \quad , \quad F_n \neq F_{n+1} \quad \text{et} \quad T(F_{n+1}) \subset F_n \quad .$$

Démonstration.

Supposons l'existence d'une telle suite $(F_n)_{n \geq 0}$. Par le lemme précédent, on peut trouver pour tout n un vecteur $x_{n+1} \in F_{n+1}$ tel que $\|x_{n+1}\| = 1$ et $\text{dist}(x_{n+1}, F_n) = 1$. De plus le sous espace F_n est invariant par A

(puisque'il est invariant par I et par T). Si $k < l$, le vecteur $Tx_l + Ax_k$ est dans F_{l-1} , et donc

$$\|x_l - (Tx_l + Ax_k)\| \geq d(x_l, F_{l-1}) = 1$$

Et donc contradiction ■

Remarque 2.2.2 *Il faut insister sur une différence essentielle entre les opérateurs bornés et non bornés. On a vu précédemment que le spectre d'un opérateur borné est un ensemble compact non vide de \mathbb{C} . Pour un opérateur non borné, on peut seulement dire que le spectre est un ensemble fermé de \mathbb{C} .*

En fait, il se peut très bien que ce spectre soit, ou bien vide, ou bien non borné dans \mathbb{C} , donc non compact.

2.3 Opérateurs à image fermée

Dans ce qui suit, on s'intéresse à la caractérisation de la classe des opérateurs linéaires à images fermées dans H .

Notations 2.3.1 : On note souvent par $cR(H)$, l'ensemble de tous les opérateurs à images fermés dans H .

Définition 2.3.1 (*Ascente et descente*)

Rappelons que les noyaux et les images des itérés d'un opérateur linéaire A sur H forment respectivement deux suites croissante et décroissante de sous espaces de H :

$$N(A^0) = \{0\} \subseteq N(A) \subseteq N(A^2) \subseteq \dots$$

et

$$R(A^0) = H \supseteq R(A) \supseteq R(A^2) \supseteq \dots$$

* **L'ascente** de A , le plus petit entier naturel $p = p(A)$ tel que

$$N(A^p) = N(A^{p+1}).$$

* **La descente** de A , le plus petit entier naturel $q = q(A)$ tel que

$$R(A^q) = R(A^{q+1}).$$

Définition 2.3.2 (*Projection Orthogonale*)

Soit H une espace de Hilbert et M, N deux sous-espaces fermé de H .

Notons par P_M et P_N la projection orthogonale sur M et N respectivement alors si $x \in M$ la distance $d(x, M)$ entre x et M donné par :

$$\exists \alpha \in H_1, \forall \varphi \in H_1, \forall \psi \in H_2 \quad d(\varphi, \alpha) \leq d(\varphi, \psi)$$

$$d(\varphi, M) = \inf_{y \in M} d(\varphi, y) = \|\varphi - P_M \varphi\|$$

Donc

$$d(\varphi, M) = \|(I - P_M)\varphi\| = \|\varphi - P_M \varphi\|.$$

Définition 2.3.3 On note P_φ la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel fermé φ de H .

Si M et N sont deux sous-espace fermés de H , on pose :

$$\begin{aligned} g(M, N) &= \|P_M - P_N\| \\ \delta(M, N) &= \|(I - P_N)P_M\| \end{aligned}$$

Alors $g(M, N)$ définit une métrique sur la famille sous-espaces vectoriels fermés de H .
(voir[7])

Définition 2.3.4 Soit A un opérateur linéaire pas nécessairement borné. Alors on appelle **conorme** de A et on note $c(A)$ la quantité:

$$c(A) = \inf \frac{\|A\varphi\|}{\|\varphi\|}$$

où l'inf. est pris sur tout les $\varphi \neq 0$ tels que $\varphi \in D(A) \cap N(A)^\perp$. (Si $A = 0$, on posera $c(A) = +\infty$)

Définition 2.3.5 (inverse généralisé)

A, B deux opérateurs fermés d'un espace de Hilbert H dans lui même de domaine $D(A)$ et $D(B)$ respectivement dans H .

On dira que l'opérateur B est un inverse généralisé de A et on notera $B(inv)A$ si seulement si

$$R(B) \subseteq D(A) \quad \text{et} \quad R(A) \subseteq D(B),$$

et

$$ABA = A \quad \text{sur} \quad D(A)$$

$$BAB = B \quad \text{sur} \quad D(B)$$

Remarques 2.3.1

(1) Cette relation est symétrique.

(2) si $B(inv)A$ alors AB est un projection tels que $R(AB) = R(A)$, $N(AB) = N(B)$.

(3) l'opérateurs $\hat{A} \mid_{D(A) \cap N(A)^\perp} \rightarrow \overline{R(A)}$ est injectif et à image dense dans $\overline{R(A)}$ on pose

$$B \mid_{R(A)} = \hat{A}^{-1} \quad B \mid_{R(A)^\perp} = 0.$$

Remarque 2.3.1 on a:

$$D(B) = R(A) \oplus R(A)^\perp = 0 \quad R(A) \subseteq D(B).$$

et

$$R(B) = R(\hat{A}^{-1}) = D(A) \cap N(A)^\perp \subseteq D(A).$$

Et il est claire $ABA = A$, $BAB = B$.

$B(inv)A$, $R(A)$ est fermé $\Rightarrow B$ est borné

l'opérateur B est appelé inverse de **Moore-Penrose**.

Proposition 2.3.1 soit A un opérateur alors :

$$X = N(A) \oplus X'$$

telle que X' est la fermeture de sous espace de X , alors A restreint à $D(A) \cap X'$ a une inverse quelconque sur $R(A)$ qui est un espace de banach. Par le théorème du graphe fermé, cet inverse est borné. Donc nous avons

$$\|x\|_x \leq c \|Ax\|_y, x \in D(A) \cap X' \quad (**)$$

Lemme 2.3.1 Soit A un opérateur linéaire défini sur X dans Y , si $\dim R(A) < \infty$ (**) vérifier, alors $R(A)$ est fermé.

Preuve. Si $\psi_n \in R(A)$ et $\psi_n \rightarrow \psi$ en Y , il y a $\varphi_n \in D(A) \cap X'$ tel que

$$A\varphi_n = \psi_n$$

Dapres (**)

$$\|\varphi_n - \varphi_m\|_x \leq c \|\psi_n - \psi_m\|_y \rightarrow 0$$

puisque X' est fermé, il y a un élément $\varphi \in D(A)$ et $A\varphi = \psi$. ■

Lemme 2.3.2 [8]

Il y a équivalence entre:

- (a) $R(A)$ est fermé,
- (b) $\|A\varphi\| \geq c\|\varphi\|$, pour tout $\varphi \in N(A)^\perp \cap D(A)$ avec c une constante strictement positive.

Remarque 2.3.2 *a partir de la preuve ci-dessus, nous enregistrons que plus généralement les déclaration suivantes sont vraies pour tous les opérateurs fermés :*

- (1) $R(A^*) = R(A)^\perp$
- (2) $R(A)$ est fermé si et seulement si $R(A^*)$ est fermé dans H
- (3) $N(A^*) \oplus R(A) = H$ si et seulement si $R(A)$ est un sous-espace fermé dans H .

Théorème 2.3.1 [8] *soit $A \in C(H)$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:*

- 1) $R(A)$ est fermé.
- 2) $R(A^*)$ est fermé.
- 3) A^\dagger est borné.

Proposition 2.3.2 *soit $A \in C(H)$ densément défini. alors nous avons ce qui suit :*

- 1) si $R(A)$ est fermé, Alors $c(A) = \frac{1}{\|A^\dagger\|}$.
- 2) $c(A^*A) = c(A)^2$

Théorème 2.3.2 *Soit X, Y des \mathbb{C} - espaces de Banach et $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.*

Alors A est d'image fermée si et seulement s'il existe $c > 0$ tel que :

$$\|A\varphi\| \geq c.d(\varphi, N(A)), \forall \varphi \in X.$$

Preuve. [1] ■

Théorème 2.3.3 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, comme précédemment. Si il existe un sous-espace fermé Y_0 tel que $R(A) \oplus Y_0$ est fermé, alors A est un opérateur à image fermée.*

Corollaire 2.3.1 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, comme avant.*

Si $R(A)$ admet un supplémentaire, alors A est un opérateur à image fermée.

Preuve. Il s'agit d'un résultat immédiat du théorème précédent, vu que si $R(A)$ admet un supplémentaire, il existe Y_0 tel que $R(A) \oplus Y_0 = Y$ qui est fermé. Par le théorème, $R(A)$ doit donc être fermée. ■

Chapitre 3

Opérateurs semi-Fredholm

Dans ce chapitre, on étudie les opérateurs de Fredholm, ainsi que leur stabilité, on s'intéresse aussi aux propriétés fondamentales de ces opérateurs de Fredholm et la théorie de perturbation. On donnera quelques théorèmes de stabilité.

3.1 Opérateurs de Fredholm

Définition 3.1.1 Soit H un espace de Hilbert et $F \subset H$ un sous espace vectoriel (non supposé fermé), on appelle codimension de F la dimension de $\frac{H}{F}$. On note $\text{co dim } F = \dim(\frac{H}{F})$. Ici $\frac{H}{F}$ est l'espace vectoriel quotient, qui est une notion purement algébrique et n'utilise pas la structure d'espace de Hilbert.

lorsque F est fermé, on a la somme directe $H = F \oplus F^\perp$, donc $\frac{H}{F}$ est isomorphe à F^\perp et $\text{co dim } F = \dim(\frac{H}{F})$.

Définition 3.1.2 $A \in C(H)$ est dit de **Fredholm** et sera noté $A \in F(H)$ si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites:

- (1) $R(A)$ est fermé dans H .
- (2) $\max\{\dim N(A), \dim N(A^*)\} < \infty$.

- A est dit **semi-Fredholm** et on note $A \in sF(H)$ si et seulement si $A \in C(H)$ et les conditions (1) et (2) sont vérifiées ou:

$$(2') \min\{\dim N(A), \dim N(A^*)\} < \infty$$

Notations 3.1.1 on note :

$$1/ \alpha(A) = \dim N(A),$$

$$2/ \beta(A) = \dim N(A^*).$$

Alors on définit l'indice de A par :

$$\text{ind}(A) = \dim N(A) - \text{co dim } R(A).$$

Définition 3.1.3 (*spectre essentiel*)

Pour tout A de $C(H)$, on appelle spectre essentiel de A , l'ensemble $\sigma_e(A)$ défini par:

$$\sigma_e(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda I \text{ n'est pas semi-Fredholm}\}.$$

alors $\sigma_e(A)$ est un ensemble compact de \mathbb{C} , non vide inclus dans le spectre classique ($\sigma_e(A) \subseteq \sigma(A)$).

Proposition 3.1.1 Un opérateur de Fredholm A est d'image fermée, en conséquence on a la formule:

$$\text{ind}(A) = \alpha(A) - \beta(A). \quad (3.1.1)$$

Démonstration.

Soit A un opérateur de Fredholm. Quitte à remplacer A par $A|_{N(A)^\perp}$, on peut supposer que A est injectif. Comme $R(A)$ est de codimension finie, il existe $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n \in H$ tels que $\{R(A) + \psi_1, R(A) + \psi_2, \dots, R(A) + \psi_n\}$ soit une base de $\frac{H}{R(A)}$. Définissons un opérateur

$$T : H \oplus \mathbb{R}^n \rightarrow H \quad \text{par} \quad T(\varphi, v) = A\varphi + \sum_{j=1}^n v_j \psi_j.$$

Alors T est continu et bijectif, et donc inversible. Ainsi il existe une constante $c > 0$ tel que $\|T(\varphi, v)\| \geq c\|(\varphi, v)\|$ pour tout φ, v . En particulier $\|A\varphi\| \geq c\|\varphi\|$ pour tout φ , ce qui implique que $R(A)$ est fermée. ■

Théorème 3.1.1 *si A un opérateur compact, alors $I - A$ est de Fredholm, et $\text{ind}(I - A) = 0$.*

Démonstration. On démonontré que $N(I - A)$ est de dimension fini lorsque A est compact. De même, $N(I - A^*)$ est de dimension finie donc $R(I - A)$ est de codimension finie et $I - A$ est de Fredholm .

pour montrer que l'indice est nul, nous allons pocéder par récurrence : pour $n \in \mathbb{N}$, soit (p_n) la propsition «pour tout opérateur A compact tel que $\dim N(I - A) \leq n$, on a $\dim N(I - A) = \dim N(I - A^*)$ ».

On a vu que si $I - A$ est injectif, alors il est aussi surjectif, et donc $I - A^*$ est aussi injectf. Ainsi (p_0) est vraie.

Supposons que (p_{n-1}) est vraie. Soit A un opérateur compact tel que $\dim N(I - A) = n$. Alors $I - A$ n'est pas surjectif, et comme on sait qu'il est d'image fermée on peut choisir $y_0 \in R(I - A)^\perp$, avec $y_0 \neq 0$.

De même on peut choisir $x_0 \in N(I - A)$, $x_0 \neq 0$. Posons alors $A'(h) = A(h) + \langle h, x_0 \rangle y_0$. Alors A' est compact (c'est la somme d'un opérateur de rang 1).

De plus $(I - A')(h) = 0$ si seulement si $(I - A)(h) = 0$ et $h \perp x_0$, donc $\dim N(I - A') = \dim N(I - A) - 1$.

De même on a $A'^*(h) = A^*(h) + \langle h, x_0 \rangle y_0$ donc $\dim N(I - A'^*) = \dim N(I - A^*) - 1$.

On sait d'après l'hypothèse de récurrence que $\dim N(I - A') = \dim N(I - A'^*)$, et donc $\dim N(I - A) = \dim N(I - A^*)$. ■

Exemple 3.1.1 *Considérons deux espaces de Banach X et Y de dimensions finies.*

(Par exemple \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^m muni de la norme euclidienne.) Soit $A : X \rightarrow Y$ un opérateur linéaire continu. Supposons que, $\dim(N(A))$ et $\dim(N(A^))$ sont finies et $R(A)$ est fermée, étant de dimension finie. Alors,*

$$\begin{aligned} \text{ind}(A) &= \dim(N(A)) - \dim(N(A^*)) \\ &= \dim(N(A)) - \dim(Y/R(A)) \\ &= \dim(N(A)) - (\dim(Y) - \dim R(A)) \\ &= \dim(N(A)) - \dim(Y) + \dim R(A) \\ &= \dim(X) - \dim(Y) \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Théorème 3.1.2 Soit X et Y des espaces de Banach. Alors:

- (i) $K(X, Y)$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{L}(X, Y)$;
- (ii) $F(X, Y)$ est un sous-espace de $\mathcal{L}(X, Y)$ et $\overline{F(X, Y)} \subset K(X, Y)$;
- (iii) si X_1 et Y_1 sont des espaces de Banach, $U \in \mathcal{L}(X_1, X)$, $A \in K(X, Y)$ et $S \in \mathcal{L}(Y, Y_1)$,
puis $SAU \in K(X_1, Y_1)$. Si $A \in F(X, Y)$, alors $SAU \in F(X_1, Y_1)$.
- (iv) si $A \in K(X, Y)$, alors A est de rang fini si et seulement si $\text{Ran}(A)$ est fermé.

Preuve. [22] ■

Proposition 3.1.2 Soit $A \in \mathcal{F}(H)$. Si A est bijectif alors A est de Fredholm d'indice nul.

Preuve. si A est bijectif, Alors $N(A) = \{0\}$, par conséquent $\dim N(A) < +\infty$ De plus $R(A) = H_0$ est un fermé et $\dim R(A^*) = 0$.

donc l'opérateur A est de Fredholm

$$\begin{aligned} \text{ind}(A) &= \dim(N(A)) - \dim R(A^*) \\ &= 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$

■

Proposition 3.1.3 Soit $A \in C(H)$ un opérateur de Fredholm. Alors son adjoint A^* est aussi un opérateur de Fredholm, on a

$$H = N(A) \oplus R(A^*) = N(A^*) \oplus R(A)$$

et

$$\text{ind}(A) = -\text{ind}(A^*)$$

De plus, A est bijectif si et seulement si A^* est bijectif.

contre-exemple : l'opérateur nul $A : X \rightarrow Y$, définie par $A(x) = 0$ pour tout $x \in X$ entre deux espaces de Banach n'est pas un opérateur de Fredholm si la dimension de X ou de Y est infinie.

En effet , si X est de dimension infinie, alors $N(A) = X$ est de dimension infinie et si Y est de dimension infinie, alors $R(A) = \{0\}$ dont la codimension , qui est la dimension de Y , est infinie

Soit X, Y des espaces de Banach et $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Soit M , un sous-espace de X de co-dimension finie n .

Alors A est de Fredholm si et seulement si la restriction $A_0 : M \longrightarrow Y$ est de Fredholm.
De plus,

$$\text{ind}(A) = \text{ind}A_0 + n$$

Démonstration. [1] ■

Théorème 3.1.3 *Soit X, Y, Z des espaces de Hilbert.*

Si $A : X \rightarrow Y$ et $B : Y \rightarrow Z$ sont des opérateurs de Fredholm, alors BA est un opérateur de Fredholm. De plus,

$$\text{ind}BA = \text{ind}A + \text{ind}B.$$

Preuve. [1]

Soit \tilde{A} la bijection associée à A et posons A_0 , la restriction de A à X_0 (Notons que A_0 est aussi la restriction de A à X_0). Comme \tilde{A} est un isomorphisme et que B est Fredholm, l'opérateur $B\tilde{A}$ est un opérateur de Fredholm avec

$$\text{ind}B\tilde{A} = \text{ind}B.$$

En identifiant X_0 et $X_0 \times \{0\}$, on obtient que BA_0 est la restriction commune de BA et $B\tilde{A}$ à X_0 .

par le lemme précédent $B\tilde{A}$ est Fredholm $\Leftrightarrow BA_0$ est Fredholm $\Leftrightarrow BA$ est Fredholm.

De plus

$$\begin{aligned} \text{ind}BA_0 &= \text{ind}B + \dim(X/X_0) \\ &= \text{ind}B\tilde{A} - \dim(X_0 \times Y_0/X_0 \times \{0\}) + n(A) \\ &= \text{ind}B + \text{ind}A. \end{aligned}$$

■

3.1.1 Alternative de Fredholm

$A \in sF(H)$ si et seulement si l'alternative de Fredholm est vérifiée:

- (i) $\forall f \in H$, l'équation $A\varphi = f$, $\varphi \in D(A)$ admet des solutions. Si et seulement si f est orthogonal à chaque solution ψ de $A\psi^* = 0$.
- (ii) l'équation $A\varphi = 0$, $A^*\varphi = 0$ possède un nombre fini des solutions linéairement indépendantes.

Proposition 3.1.4 *soit $A \in K(H)$*

- 1/ $N(I - A)$ est de dimension finie,
- 2/ $R(I - A) = N(I - A^*)^\perp$
- 3/ $N(I - A) = \{0\} \Leftrightarrow R(I - A) = H$
- 4/ $\dim N(I - A) = \dim N(I - A^*)$.

Preuve. [4] ■

Remarque 3.1.1 *l'Alternative de Fredholm concerne la résolution de l'équation $u - Au = f$.*

Notations 3.1.2 *les propriétés des opérateurs de Fredholm sont les suivantes:*

- 1- l'ensemble $\mathcal{F}(H)$ est ouvert dans $\mathcal{L}(H)$ et l'application $A \rightarrow ind(A)$ est continue sur chaque compact,
- 2- tout opérateur $A \in \mathcal{F}(H)$ est inversible modulo des opérateurs de rang fini, i.e
il existe

$$B \in \mathcal{L}(H) \text{ tel que } (AB - I) \text{ et } (BA - I) \text{ soit de rangs finis}$$

Inversement si $A \in \mathcal{L}(H)$ et s'il existe $B \in \mathcal{L}(H)$ tel que

$$AB - I \in K(H) \quad \text{et} \quad BA - I \in K(H)$$

alors $A \in \mathcal{F}(H)$

3- si $A \in \mathcal{F}(H)$ et si $B \in k(H)$ alors

$$A + B \in \mathcal{F}(H) \quad \text{et} \quad \text{ind}(A + B) = \text{ind} A$$

4- si $A \in \mathcal{F}(H)$ et si $B \in \mathcal{F}(H)$ alors

$$BA \in \mathcal{F}(H) \quad \text{et} \quad \text{ind}(BA) = \text{ind}(A) + \text{ind}(B)$$

Théorème 3.1.4 Soit E, F des \mathbb{C} -espaces de Banach et $A \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors A est de Fredholm si et seulement s'il existe $T \in \mathcal{L}(E, F)$. tel que $I_F - AT$ et $I_E - TA$ sont des opérateurs de rang fini.

Preuve. [1] ■

Lemme 3.1.1 A un opérateur linéaire fermé, A est semi-Fredholm si et seulement si les alternatives Fredholm restreintes suivantes sont satisfaites

1 pour tout arbitrage $f \in H$, l'équation $A\varphi = f \in D(A)$, est résoluble si et seulement si f est orthogonal à chaque solution ψ

$$A^*\psi = 0.$$

2 au moins l'une des équations $A\varphi = 0$, $A^*\varphi = 0$ n'a qu'une solution finement indépendante de manière linéaire.

Preuve. [23] ■

3.2 Propriétés et stabilité les opérateurs Semi-Fredholm

Théorème 3.2.1 $A \in sF(H)$ si et seulement si $A^* \in sF(H)$:

Preuve. comme A est fermé on a $(A^*)^* = A$, il suffit donc démontrer que A^* est semi-Fredholm lorsque A est A^* comme adjoint de A est fermé

$$\dim N(A) = \text{co dim } R(A^*) \quad , \quad \dim N(A^*) = \text{co dim } R(A).$$

(ii) pour $A \Rightarrow$ (iii) pour A^*

Démontrer par l'absurde (ii'') est vraie pour A^* aussi

$$(ii'') \quad \|A\varphi\| \geq c\|\varphi\| \quad \forall \varphi \in N(A)^\perp \cap D(A).$$

Supposons qu'il existe $\varphi^n \in N(A^*)^\perp \cap D(A^*)$ tel que

$$A^*\varphi^n \longrightarrow 0, \|u^n\| = 1.$$

On doit avoir $\varphi^n = A\psi^n$, $\psi^n \in N(A)^\perp \cap D(A)$. (due $N(A^*) \oplus R(A) = H \Leftrightarrow R(A)$ fermé).

En outre

$$\begin{aligned} 1 &= \|\varphi^n\|^2 = \langle \varphi^n, \varphi^n \rangle = \langle A\psi^n, \varphi^n \rangle = \langle \psi^n A^* \varphi^n \rangle \\ &\leq \|\psi^n\| \|A^* \varphi^n\| \quad n=1,2,\dots \end{aligned}$$

a qui entraîne que $\|\psi^n\| \rightarrow +\infty$. Soit $z^n = \frac{\psi^n}{\|\psi^n\|}$. Il est clair que $\|z^n\| = 1$, $z^n \in N(A)^\perp \cap D(A)$,

$$Az^n = \frac{\varphi^n}{\|\psi^n\|} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Donc (ii'') ne peut pas être vraie pour A (i.e. A n'est pas $sF(H)$, contradiction) . ■

Proposition 3.2.1 Si $A \in sF(H)$ alors $A^* \in sF(H)$ donc $\text{ind}(A) = -\text{ind}(A^*)$.

Preuve. [12] ■

Théorème 3.2.2 pour tout $A \in \mathcal{L}(H) \cap sF(H)$ et tout $B \in \mathcal{L}(H)$; $(A - B) \in K(H) \Rightarrow B \in sF(H)$ et $\text{ind}(A) = \text{ind}(B)$

Preuve. [24] ■

Théorème 3.2.3 (*Théorème de l'indice* [27])

$\text{ind}(A - \lambda u)$ est constant sur chaque composante connexe de $P_e(A)$.

Les opérateurs $sF(H)$ ont deux propriétés importantes :

P_1 : l'ensemble des opérateurs $sF(H)$ est ouvert dans $C(H)$ muni de la métrique g .

P_2 : En 1958, T.Kato a démontré dans [16] le théorème suivant:

Théorème 3.2.4 [16]

soit $A \in sF(H)$, alors il existe une décomposition directe $H = M \oplus N$ telle que:

- (a) M et N sont invariants par A .
- (b) $A|_M$ est régulière (c'est-à-dire $R(A)|_M$), est un sous-espace fermé de H et contient:

$$N\{(A|_M)^n\}; n \in \mathbb{N}.$$

$$N \subseteq D(A); \dim N < \infty \text{ et } A|_N \text{ est nilpotent.}$$

cette décomposition est connue sous le nom de décomposition de **KATO**. Les opérateurs admettant une telle décomposition ont été caractérisés en 1978 par **J-P. LABROUSSE** dans [18] et on les appelle les opérateurs **quasi-Fredholm** (classe qui a été généralisée récemment par **M.MBEKHTA** aux opérateurs dits **pseudo-Fredholm**)

Lemme 3.2.1 si $A \in \mathcal{F}(X, Y)$ soit Y' complémentaire de $R(A)$ en Y , i.e..

$$Y = R(A) \oplus Y' \quad ((3.1))$$

alors il y a un opérateur borné de A' de Y à $D(A) \cap X'$ tel que :

- a) $A^{-1}|_{Y'}$
- b) $A^{-1}A = I$ en $D(A) \cap X'$
- c) $AA^{-1} = I$ en $R(A)$

Preuve. sur $R(A)$, nous définissons A^{-1} comme l'inverse de A .sur Y' , nous l'avons fait disparaître.En (2.2),cela definit A^{-1} complètement . que c'est borné de (2.1.1) ■

Lemme 3.2.2 opérateur \acute{A} verifier les conditions suivant:

$$\acute{A}A = I + F_1 \text{ en } D(A) \quad ((3.2))$$

$$A\acute{A} = I + F_2 \text{ en } H$$

où F_1 (resp. F_2) est un opérateur borné dans H (resp. F_2) ayant image dans $N(A)$

Preuve. [26] ■

Lemme 3.2.3 Soit A un opérateur fermé densément défini de X à Y supposons qu'il y ait des opérateurs bornés A_1, A_2 de Y à X et des opérateurs compacts K_1 sur X , K_2 sur Y tels que:

$$\begin{aligned} A_1 A &= I + K_1 \quad \text{en } D(A) \\ A A_2 &= I + K_2 \quad \text{en } H \end{aligned}$$

alors $A \in sF(H)$

Preuve. [26] ■

Théorème 3.2.5 soit $A \in sF(H)$ et $T \in sF(H)$, alors $AT \in sF(H)$ et:

$$\text{ind}(AT) = \alpha(A) + \beta(T) \quad ((3.3))$$

Preuve. [26] ■

Lemme 3.2.4 Soit \tilde{H} un espace de Hilbert continuellement inclus dans H tel que $D(A)$ soit dense dans \tilde{H} . Alors $A \in sF(\tilde{H})$ implique $A \in sF(H)$, avec le même $\alpha(A)$ et $\beta(A)$

Théorème 3.2.6 soit A un opérateur semi-Fredholm et $K(H)$ un opérateur compact alors

$$(A + K) \in sF(H) \quad \text{et} \quad \text{ind}(A + K) = \text{ind}(A).$$

Preuve. d'après lemme 3.2.1 il y a un opérateur \acute{A} borné de H dans H et d'après (3.2) on a:

$$\begin{aligned} \acute{A}(A + K) &= I + F_1 + \acute{A}K \quad \text{en } D(A) \\ A(\acute{A} + K) &= I + F_2 + K\acute{A} \quad \text{en } H \end{aligned}$$

puisque \acute{A} est borné, les opérateurs $\acute{A}K$ et $K\acute{A}$ sont compacts. conséquent $(A + K) \in sF(H)$ d'après lemme 3.2.3 depuis \acute{A} étant fermé, on peut faire $D(A)$ dans un espace H de Hilbert en

.l'équipant de la norme graphique

$$\|\varphi\|_{D(A)} = \|\varphi\| + \|A\varphi\|. \quad ((3.4))$$

par le lemme 3.2.4 $A \in sF(H)$, avec $\alpha(A)$ et $\beta(A)$ le même. de plus $\acute{A} \in sF(H)$ par le lemme 3.2.1 conséquent par (3.2) et (3.3)

$$ind(A) + ind(\acute{A}) = ind(I + F_1) = 0 \quad ((3.5))$$

ou la dernière égalité découle de la théorie de Riez classique .encore par lemme 3.2.4 nous avons $'(A + K)sF(H)$ et ainsi par (3.3)et(3.4)

$$ind(A + K) + ind(\acute{A}) = ind(I + F_1 + K\acute{A}) = 0$$

ceci avec (3.5) montre que $ind(A + K) = ind(A)$ quand les deux sont considérés dans $sF(H)$. Mais c'est la même chose quand ils sont considérés comme des opérateur dans $sF(H)$

■

Proposition 3.2.2 *Si $A \in sF(H)$, alors :*

- (i) $R(A)$ est fermé .
- (ii) $c(A) = c(A^*)$.

Preuve. La restriction \hat{A} de A à l'espace vectoriel $R(A^*) \cap D(A)$ peut être ne comment opérateur linéaire fermé de l'espace de Hilbert $R(A^*)$ dans l'espace de hilbert $R(A)$ ayant un inverse borné \hat{A}^{-1} et on a en particulaire $c(A) = \|(\hat{A})^{-1}\|^{-1}$.

Il est claire que $c(A^*) = \|(\hat{A}^*)^{-1}\|^{-1}$.en utilisant la restruccion corespandant \hat{A}^* de A^* à $R(A) \cap D(A^*)$. Qui est un opérateur lineaire de $R(A)$ dans $R(A^*)$. Or $\hat{A}^* = (\hat{A})^*$ ■

Lemme 3.2.5 *A et B deux opérateurs semi-Fredholm si en plus*

$$\dim R(B^*) < \infty \quad \dim R(A) < \infty$$

et si au moins l'une des dimension $\dim R(B)$, $\dim R(A^*)$ est également finie alors AB est semi-Fredholm ,aussi

$$B^*A^* \text{ est semi-Fredholm et } (BA)^* = B^*A^*$$

Preuve. :[8] ■

3.3 Perturbation des opérateurs semi-Fredholm

Des fois, dans le but de prolonger le domaine d'inversibilité d'un opérateur, on perturbe (or lui rajoute)

par un opérateur compact bien choisi, de norme très petite

* l'ensemble des opérateurs semi-Fredholm à gauche définit:

$$\Phi_+ = \{A \in \mathcal{L}(H) : R(A) \text{ est fermé et } \alpha(A) \text{ est finie}\}.$$

* l'ensemble des opérateurs semi-Fredholm à droite définit:

$$\Phi_- = \{A \in \mathcal{L}(H) : R(A) \text{ est fermé et } \alpha(A^*) \text{ est finie}\}.$$

* l'ensemble des opérateurs semi-Fredholm est:

$$sF = \Phi_+ \cup \Phi_-$$

* l'ensemble des opérateurs de Fredholm est:

$$F = \Phi_+ \cap \Phi_-$$

Nous allons définir:

$$\Phi_+(X) := \Phi_+(X, X) \quad \text{et} \quad \Phi_-(X) := \Phi_-(X, X),$$

tandis que

$$F(X) := F(X, X) \quad \text{et} \quad sF(X) := sF(X, X),$$

Théorème 3.3.1 *Supposons que X, Y et Z sont des espaces de Banach:*

- i) Si $A \in \Phi_-(X, Y)$ et $T \in \Phi_-(Y, Z)$ alors $AT \in \Phi_-(X, Z)$.
- ii) Si $A \in \Phi_+(X, Y)$ et $T \in \Phi_+(Y, Z)$ alors $AT \in \Phi_+(X, Z)$.
- iii) Si $A \in F(X, Y)$ et $T \in F(Y, Z)$ alors $AT \in F(X, Z)$.

Preuve. (i) $A(X)$ et $T(Y)$ sont complétés, puisqu'ils sont fermés et de dimension finie. Ecrivez

$$Y = A(X) \oplus M \quad \text{et} \quad Z = T(Y) \oplus N.$$

Puis

$$Z = N + T(A(X)) + T(M) = TA(X) + (N + T(M)),$$

où $N + T(M)$ est de dimension finie. Donc $TA(X)$ a une codimension finie, c'est-à-dire $AT \in \Phi_-(X, Z)$.

L'assertion (ii) est prouvée à partir de (i) par la dualité. En effet, A^* et S^* sont semi-Fredholm à droite et donc A^*S^* est semi-Fredholm à droite.

Par conséquent, TA est semi-Fredholm à gauche.

L'assertion (iii) est évidente à partir de (i) et (ii). ■

Théorème 3.3.2 Soient X, Y et Z sont des espaces de Banach, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, $T \in \mathcal{L}(Y, Z)$.

- i) Si $AT \in \Phi_-(X, Z)$ alors $T \in \Phi_-(Y, Z)$.
- ii) Si $AT \in \Phi_+(X, Z)$ alors $A \in \Phi_+(X, Y)$.
- iii) Si $AT \in F(X, Y)$ alors $A \in \Phi_+(X, Y)$ et $T \in \Phi_-(Y, Z)$.

Preuve. (i) Puisque $T(Y) \supseteq TA(X)$ alors $\text{co dim } T(Y) \leq \text{co dim } TA(X)$.

(ii) Si $TA \in \Phi_+(X, Z)$ alors $(TA)^* = A^*T^* \in \Phi_-(Z^*, X^*)$, donc A^* est semi-Fredholm à droite et donc A est semi-Fredholm à gauche.

(iii) Il est évident de (i) et (ii). ■

Théorème 3.3.3 Soit $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ et $K \in K(X, Y)$

- (i) Si $A \in \Phi_+(X, Y) \Rightarrow A + K \in \Phi_+(X, Y)$.
- (ii) Si $A \in \Phi_-(X, Y) \Rightarrow A + K \in \Phi_-(X, Y)$.
- (iii) Si $A \in sF(X, Y) \Rightarrow A + K \in sF(X, Y)$.

Preuve. (i) Soit $A \in \Phi_+(X, Y)$ et soit M_1 un sous-espace fermé de X tel que $\text{co dim } M_1 < \infty$ et $\inf Ax : x \in M_1, x = 1 = c > 0$. Puisque K est compact, il existe un sous-espace fermé $M_2 \in X$ avec $\text{co dim } M_2 < \infty$ et $\sup Ax : x \in M_2, x = 1 \geq \inf Ax - Kx : x \in M, x \geq c/2$. Par conséquent $A + K \in \Phi_+(X, Y)$.

(ii) Si $A \in \Phi_-(X, Y)$ et $K \in K(X, Y)$, alors A^* est semi-Fredholm à gauche et c est compact. Par (i)

$A^* + K^*$ est semi-Fredholm à gauche, et donc $A + K$ est semi-Fredholm à droite.

(iii) Suit de (i) et (ii). ■

Lemme 3.3.1 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur à image fermée. Supposons qu'il existe M un sous-espace de H (non nécessairement fermé) tel que $N(A) + M$ est un sous-espace fermé, alors $A(M)$ est fermé. En particulier, si M est fermé. En particulier, si M est fermé $\dim N(A)$ est finie alors $A(M)$ est fermé.*

Maintenant, on va énoncer l'un des premiers théorèmes importants de la théorie des opérateurs semi-Fredholm établi en 1958 par T. Kato [16]. Ce théorème affirme que les opérateurs semi-Fredholm sont stables par les petites perturbations. Plus précisément :

Théorème 3.3.4 [15]

Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur semi-Fredholm et $S \in \mathcal{L}(H)$ tel que $\|A - T\| < c(A)$, alors:

- i) T est semi-Fredholm;
- ii) $\alpha(T) \leq \alpha(A)$ et $\beta(T) \leq \beta(A)$;
- iii) $\text{ind}(T) = \text{ind}(A)$

Corollaire 3.3.1 [12]

soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur semi-Fredholm et $T \in \mathcal{L}(H)$ tel que $\|T\| < c(A)$, alors il existe un réel $\rho > 0$

tel que $\alpha(A + \lambda T)$ et $\beta(A + \lambda T)$ sont constantes pour tout $0 < |\lambda| < \rho$.

Théorème 3.3.5 [13]

soit $A \in \mathcal{L}(H)$, alors on a:

1/ $A \in \Phi_+$ si et seulement si il existe $L \in \mathcal{L}(H)$ et $K_1 \in K(H)$ tels que:

$$LA = I + K_1;$$

2/ $A \in \Phi_-$ si et seulement si il existe $S \in \mathcal{L}(H)$ et $K_2 \in K(H)$ tels que:

$$AS = I + K_2;$$

Lemme 3.3.2 [13]

soit $A \in \mathcal{L}(H)$, alors il existe W une isométrie si $\text{ind}(A) < 0$ (resp. $\text{ind}(A) \geq 0$) tel que
 $A = W | A |$
 et $\text{ind}(A) = \text{ind}(W)$.

pour tout A de $\mathcal{L}(H)$, on note $m_e(A)$, le module minimal essentiel de A , défini par:

$$m_e(A) = \inf\{\lambda : \lambda \in \sigma_e(| A |)\}.$$

Théorème 3.3.6 [2]

soit $A \in \mathcal{L}(H)$, alors:

- $m_e(A) > 0$ si et seulement si $\dim N(A)$ est finie et $R(A)$ est fermé.

Autrement dit,

$$m_e(A) > 0 \text{ si et seulement si } A \in \Phi_+.$$

- Si $m_e(A) < 0$ et $m_e(A^*) > 0$, alors $m_e(A) = m_e(A^*)$.

Remarque 3.3.1

- 1) Si $\alpha(A^*)$ (resp. $\alpha(A)$) est infinie, alors $m_e(A) \geq m_e(A^*)$. (resp $m_e(A^*) \geq m_e(A)$).
- 2) Si $\alpha(A)$ (resp. $\alpha(A^*)$) est finie, alors $m_e(A) \geq m_e(A^*)$. (resp $m_e(A^*) \geq m_e(A)$).

3) $\alpha(A^*) \geq \alpha(A)$ (resp $\alpha(A) \geq \alpha(A^*)$), alors $m_e(A) \geq m_e(A^*)$. (resp $m_e(A^*) \geq m_e(A)$).

Définition 3.3.1 soit $A \in \mathcal{L}(H)$, alors:

$$m_e(A) = \inf\{\lambda > 0 : \dim E([\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon])H \text{ est infinie, pour tout } \varepsilon > 0\}.$$

Géométriquement $m_e(A)$ est le rayon de la plus grande boule ouverte incluse dans l'ensemble des opérateurs semi-Fredholm à gauche et de centre l'opérateur A . Ce résultat est basé sur le théorème suivant :

Théorème 3.3.7 Soit A un opérateur semi-Fredholm d'indice $n \in \overline{\mathbb{Z}}$ et $T \in \mathcal{L}(H)$ tel que

$$\|A - T\| < \max\{m_e(A), m_e(A^*)\} \text{ alors}$$

1. T est semi-Fredholm;
2. $ind(A) = ind(T) = n$

Démonstration. ■

Quitte à permuter les rôles de A et A^* on peut supposer que $m_e(A) = \max\{m_e(A), m_e(A^*)\}$, sinon on passe à l'adjoint. Donc $m_e(A) > 0$, car dans l'hypothèse on a supposé que $\max\{m_e(A), m_e(A^*)\} > 0$.

D'autre part, soit $c_e(A) = \inf\{\sigma_e(|A| \setminus 0)\}$, la conorme essentielle de A . Alors, on remarque que $c_e(A) = m_e(A)$

si $m_e(A) > 0$. Or, d'après le Théorème 2 [16] il existe K un opérateur compact tel que $c_e(A) = c(A + K)$. Donc :

$$0 \leq \|A - T\| < m_e(A) = c_e(A) = c(A + K).$$

D'ou

$$\|A + K - (T + K)\| \leq c(A + K). \quad ((*))$$

D'ailleurs, puisque $A \in \Phi_+$, $T + K$ est aussi un élément de Φ_+ . Ainsi, on conclut par (*) et le lemme 3.3.1, que $T + K \in \Phi_+$ et

$$ind'(A) = ind(A + K) = ind(T + K) = ind(T).$$

3.4 Opérateurs réguliers

Définition 3.4.1 *soit A un opérateur fermé de H dans H . On dira que $\lambda \in \mathbb{C}$ est un point régulier pour A si les conditions suivantes sont satisfaites:*

- (a) $R(A - \lambda I)$ est fermé dans H
- (b) $[N(A - \lambda I)^n] \subseteq R(A - \lambda I)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemples d'opérateurs réguliers:

- 1) $A \in C(H)$, A surjectif.
- 2) $A \in C(H)$, A injectif avec $R(A)$ fermé.

L'ensemble des points réguliers pour A [noté $reg(A)$] est un ouvert dans \mathbb{C} .

On a l'inclusion suivante : $\rho(A) \subseteq reg(A)$, (il y a égalité si $\dim H < \infty$ ou si A est normal. Par définition A est normal si $A \in C(H)$ et $A^*A = AA^*$).

Proposition 3.4.1 [18]

Soit C une composante connexe de $reg(A)$ et notons $S(H)$ l'espace des sous-espaces fermés de H , muni de la métrique g . Alors les applications:

$$\begin{aligned} reg(A) &\rightarrow S(H), & u &\rightarrow N(A - uI) \\ reg(A) &\rightarrow S(H), & u &\rightarrow R(A - uI) \end{aligned}$$

Sont continues sur C .

Conclusion

cette classe d'opérateurs qui possède cette deuxième propriété à été elargie aux opérateurs **quasi Fredholm** par **J-P. LABROUSSE** (elle contient en dennent les semi-Fredholm comme cas particulier).

A est dit $Q.F$ quasi-Fredholm de degré d si :

- (a) $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq d \quad R(A^n) \cap N(A) = R(A^d) \cap N(A).$
- (b) $N(A) \cap R(A^d)$ est fermé dans H .
- (c) $R(A) + N(A^d)$ est fermé dans H .

Bibliographie

- [1] -**A. ARNOLD & C. LASSUEUR**, Opérateurs de Fredholm, Projet de Semestre été 2005,
- [2] -**R.H.BOULDIN**, The essential minimum modulus, Indiana. Univ. Math. J.30 (1981), 513-517
- [3] -**M.BENHARRAT**, comparaisons between the different definition of the essentiel spectrum and application ,thèse de doctorat ,université d'Oran 1,(2013).
- [4] -**H. BREZIS**, Analyse fonctionnelle, théorie et application, MASSON Paris New York Barcelone Milan Mexico Sao Paulo 1987.
- [5] -**H. CHEBLI**, Analyse Hilbertienne Professeur de Mathématiques Faculté des sciences de Tunis Centre de Publication UniversitaireTunis, 2001.
- [6] -**B. CHENITI**, Correction compacte Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Magister, Université de Setif, 1989
- [7] -**I.COLOJOARA and C. FOIAS**, Theory of generalized spectral operators. Gordon and breach, NEW-YORK (1988).
- [8] -**H.O.CORDES &j.p LABROUSSE**, The Invariance of the Index in the Metric
- [9] -**N. DUNFORD**, and **J.T.SCHWARTZ** , Linear operators Part. I,II Interscience publishers, INC. NEW-YORK.

- [10] -**N. DUNFORD**, Spectral operators, Pacific J. Math. 4 (1954), 321–354.
- [11] -**A.GHERBI**, Quelques classes d'opérateurs quotients caractérisation et application. Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master, Université d'Oran 1, 2014/2015.
- [12] -**S.GOLDBERG** , Unbounded linear operators Mc. GRAW HILL (NEW-YORK 1966)
- [13] -**P.R. HALMOS**, A Hilbert space problem book, D. Van Nostrand, 1967.
- [14] -**D. HARK LEE and P. UNG CHUNG**, Perturbation and jump of a semi-Fredholm operateur , Comm. Korean Math. Soc. 9, No.3 (1994), 593–598.
- [15] -**T.KATO**, Perturbation theory for linear operators ,springer-Verlag,new York,1966.
- [16] -**T.KATO**, Perturbation theory for nullity ,deficiency and other quantites of linear operators .Journal Anal .Math, 6(1958),261-322.
- [17] -**A.KHELFAOUI**, Les opérateurs de Fredholm Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master,Université de Saïda, 2012/2013.
- [18] -**J-P. LABROUSSE**, Les opérateurs quasi-Fredholm : une généralisation des opérateurs semi-Fredholm. Rend.Circ.Math. de Palermo. (Ser II) XXIX (1980) 161-258.
- [19] -**B. MAUREY**, Analyse fonctionnelle et théorie spectrale, MT404, 2001-2002.
- [20] -**M. MBEKHTA**, Linear maps preserving semi-Fredholm operators and generalized invertibility UFR de Mathématiques, Universit'e de Lille I 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, Lille, France.
- [21] -**M. MBEKHTA & R. PAUL**, Sur la conorme essentielle, Studia. Math. 117 (3) (1996), 243-252.
- [22] -**V.MÜLLER**, Spectral Theory of Linear Operators and Spectral Systems in Banach Algebras Institute of Mathematics Czech Academy of Sciences Zitna 25 115 67 Praha 1 Czech Republic.
- [23] -**M. NADIR**, Cours d'analyse fonctionnelle, Université de M'sila, 2004.].

- [24] -**B.SZ.NAGY**, On the stability of the index of un bounded linear transformation.
Act.Math.Acad .Sci.Hung .3pp 49-52(1952)
- [25] -**K.SAUDI**, Proprietes spectrales des equations de transport et etude de quelques
resultats de perturbation dans l' espaces de Banach Mémoire présenté pour l'obtention
du diplôme de Doctorat, Université de Constantine, 2009.
- [26] -**M.SCHECHTER**, Basik Theory of Fredholm opérateur.
- [27] -**L.SHWARTZ**, Analyse Hilbertien, Coll. Hermann. (1979).